EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

Conceituais

QUESTÃO 1. A Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.) determina a probabilidade de obter, em uma única medida, o valor x_i. Na grande maioria dos casos assumimos que essa f.d.p. segue a forma de uma curva gaussiana. Descreva quais condições devem ser observadas para garantir a validade da f.d.p. gaussiana.

(indique também o significado da seguinte expressão: $P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} G_{\langle x \rangle,\sigma}(x)\,dx$, em que $G_{\langle x \rangle,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right]$)

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

QUESTÃO 2. Descreva o princípio da Máxima Verossimilhança.

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

Problemas.

P1. RETA ATRAVÉS DA ORIGEM. Suponha que sabemos que as duas variáveis x e y satisfazem a relação $y = Bx$. Isto é, y é diretamente proporcional a x, e um gráfico de y *versus* x é uma reta através da origem. (Por exemplo, a lei de Ohm, $V = RI$, nos mostra que um gráfico da voltagem V *versus* corrente elétrica I deve ser uma reta através da origem.). Suponha, ainda, que você realizou N medições (x_i, y_i), que as incertezas em x são desprezíveis e que as em y são todas iguais. Usando argumentos semelhantes ao que levou a dedução dos coeficientes para um ajuste linear, mostre, partindo do Princípio da Máxima Verossimilhança, que a melhor estimativa de B é

$$B = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

Use a propagação de erros para verificar que a incerteza em B (σ_B) é dada por:

$$\sigma_B = \frac{\sigma_\iota}{\sqrt{\sum x^2}}$$

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P2. Uma estudante mede a velocidade de um planador sobre um trilho de ar horizontal. Ela utiliza uma câmara fotográfica automática para determinar a posição *s* do planador em cinco intervalos iguais de tempo, como apresentado na tabela abaixo

Tempo *t* (s)	**Posição *s* (cm)**
-4	13
-2	25
0	34
2	42
4	56

a) Faça um gráfico de *t versus s*. **(pode-se utilizar excel ou qualquer programa gráfico)**

b) Uma forma de determinar a velocidade média *v* seria calcular $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ para cada um dos intervalos sucessivos de dois segundos e, então, calcular a média. Mostre que esse procedimento é equivalente a determinar a velocidade média através de $v=(s_5-s_1)/(t_5-t_1)$. Mostre esse resultado

c) Um procedimento melhor é fazer um ajuste por mínimos quadrados para a equação $s=s_o-vt$, usando todos os pontos de dados. Adote esse procedimento para determinar a melhor estimativa para *v* e compare o seu resultados com a do item b). (**utilize uma planilha excel para checar as suas contas. Inclua a reta obtida por mínimos quadrados no gráfica do item a).**

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P3. Mínimos Quadrados Ponderado. Suponha que você meça N pares de valores (x_i, y_i) de duas variáveis *x* e *y* que estão supostamente satisfazendo uma relação linear $y=A+Bx$. Suponha que *x* tenha incerteza desprezível e que *y* tenha incertezas s distintas. (Isto é, y_1 tem incerteza s_1, enquanto y_2 tem incerteza s_2 e assim por diante.) Podemos definir o peso da *i*-ésima medida como $w_i=1/\sigma_i^2$. Mostre que nesse caso, as estimativas para *A* e *B* são

$$A=\frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta} \quad \text{e} \quad B=\frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}$$

onde

$$\Delta=\sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2$$

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P4. Um peso, oscilando preso a uma mola vertical, deve ter a sua altura dada por

$$y = A\cos wt + B\, sen\, wt$$

Um estudante mede *w* como 10 rad/s, com incerteza desprezível. Usando uma câmera fotográfica automática, ele determina *y* para cinco instantes de tempo igualmente espaçados, como apresentado na tabela abaixo

Tempo *t* (s)	**Posição y (cm)**
-0,4	3
-0,2	-16
0,0	6
0,2	9
0,4	-8

(a) Use o princípio da Máxima Verossimilhança para mostrar que as melhores estimativas para *A* e *B,* np caso mais geral, de uma função do tipo $y = A f(x) + B g(x)$ devem satisfazer

$$A\sum[f(x_i)]^2 + B\sum f(x_i)g(x_i) = \sum y_i f(x_i)$$
$$A\sum f(x_i)g(x_i) + B\sum[g(x_i)]^2 = \sum y_i g(x_i)$$

(b) Use as equações acima para determinar a melhor estimativa para *A* e *B* com os dados obtidos na tabela acima.

(c) Faça o gráfico dos dados incluindo a curva determinada pelo mínimos quadrados.

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P5. A média Ponderada. Frequentemente uma mesma grandeza física é medida por diversos grupos de pesquisa de forma independente. Por exemplo, 3 grupos de físicos de partículas medem a massa de uma determinada partícular elementar, obtendo os seguintes resultados (em unidades de MeV/c²):

$$\begin{array}{ll} grupo\,1 & 1.967{,}0 \pm 1{,}0 \\ grupo\,2 & 1.969{,}0 \pm 1{,}4 \\ grupo\,3 & 1.972{,}1 \pm 2{,}5 \end{array}$$

Essas medidas independentes podem ser combinadas para produzir uma única melhor estimativa, que é a média ponderada.

(a) Suponha o caso mais geral, em que temos *N* medidas de uma grandeza *x,* ($x_1 \pm \sigma_1$, $x_2 \pm \sigma_2$, …, $x_N \pm \sigma_N$). Utilizando o Princípio da Máxima Verossimilhança, demonstre que a média ponderada (x_{mp}) é dada por

$$x_{mp} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

(b) A incerteza em x_{mp} pode ser calculada usando-se a propagação de erros. Demonstre que

$$\sigma_{mp} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}$$

(c) Determine a média ponderada e a incerteza corresponde a medida da partícula elementar.

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P6. Critério de Rejeição de dados Ao longo de algumas horas, um engenheiro nuclear realiza 12 medições da energia de uma fonte radioativa de vida longa, obtendo os seguintes resultados, em milicuries:

12, 34, 22, 14, 22, 17, 24, 22, 18, 14, 18, 12

(como a fonte tem uma vida longa, sua atividade não deve mudar sensivelmente durante o tempo em que todas as medições são realizadas.)
(a) Qual é a média e o desvio padrão?
(b) De acordo com o critério de Chauvenet, ele teria justificativa para rejeitar a medida de valor 34 por ela ser um erro de medida?
(c) Se o engenheiro tiver que rejeitar essa medida, o que ele obterá para a nova média e o novo desvio padrão?

EXERCÍCIOS PARA A LISTA 2 (versão: 04/01/2013)
data para entrega: 24/01/2013 – versão: 07/01/2013

NOME: ____

P7.